

Title	One Dimensional Tunnel-Junction Formulae with Application to Single Electron (Spectral and Scattering Theory and Related Topics)
Author(s)	廣川, 真男
Citation	数理解析研究所講究録 (2014), 1902: 36-52
Issue Date	2014-06
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2433/223038">http://hdl.handle.net/2433/223038</a>
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

# One Dimensional Tunnel-Junction Formulae with Application to Single Electron

岡山大学 廣川 真男

Masao Hirokawa

Okayama University

## 1 序

これまでの半導体集積回路技術やレーザー技術等の蓄積の上に、ナノテクノロジーの先端技術が加わり、量子物理学は新たな側面と展開を見せ始めている。理論物理学による議論の想像を超える興味深い実験結果も多数現れ、それらの詳細な説明と把握を行う理論物理が要求されているようにも思う。ちょうど、量子力学が誕生する過程で、実験物理学が理論物理学に投げかけた興味深い実験結果を基に、量子力学という理論が築き上げられて行く時代を彷彿するようにさえ感じる。この量子力学形成の過程で理論物理学に数学が大きく貢献した経験から、現在のこの方面の物理学における数学の貢献をも予感させる。

2008 年 1 月に RIMS 研究集会『スペクトル・散乱理論とその周辺』において S. Haroche のグループ等による共振器量子電磁量子力学 (cavity QED), 2008 年 11 月には RIMS 研究集会『非可換解析とマイクロ・マクロ双対性』において cavity QED 上で展開される H. Ritsch らの cavity-induced atom cooling の物理を紹介し、その数学的問題提起とそれに対する解析を紹介したが [10, 11], 特筆すべきことは、通常の量子電磁力学 (QED) における原子と光の相互作用の強さをを超える強結合領域を cavity QED は実現したことであろう。S. Haroche は cavity QED における業績で 2012 年の一ベル物理学賞を受賞している。また、物理学者は Josephson 接合を利用した超伝導回路上で cavity QED の実証実験にも成功し、cavity QED でさえ作れなかった強結合領域を人工原子とマイクロ波の相互作用で作り出し、QED の理論では把握できないような物理を実現し始めている [12, 13]. この超伝導回路上での cavity QED は回路量子電磁力学 (circuit QED) と呼ばれてる。これらの物理学共通のゴールは、(人工) 原子の適当な孤立した 2 準位を量子ビットとみなし、その量子ビットをレーザーやマイクロ波により制御する量子デバイス機能の確立にある。

量子情報や量子計算機の量子デバイスを考えた場合、そのデバイスは、量子ビットの持つ情報の制御部、量子ビットの情報の記憶部、量子ビットの情報の輸送部から成ることがシステム論 [25] から要求される。本稿では、1 次元接合量子デバイス中の単電子の輸送問題、さらに、電子の電荷の流れ (i.e., 電流) に注目する物理学ではなく、電子のスピンの流れに注目するスピントロニクス [3] と呼ばれる物理学の立場に立ち、単電子のスピンを量子ビットとみなしたとき [7, 17, 19], その量子ビットの輸送問題の数学的側面を考えるため、論文 [14, 15] で得た結果を中心に紹介してみたい。

1985年, 当時のIBM Thomas J. Watson 研究所のR. A. Webbらは, 一つのAharonov-Bohm リングに二本のリードを繋ぎ図1(a)のようなデバイスを作り, Aharonov-Bohm リングの輪の中に磁場をかけると, Aharonov-Bohm 効果が磁気抵抗効果をもたらすことを発見した [27]. ここで, 磁気抵抗効果は, 磁場を外からかけることにより電気抵抗が変化する現象であり, 磁気抵抗とは異なる現象であることを注意しておく. つまり, R. A.

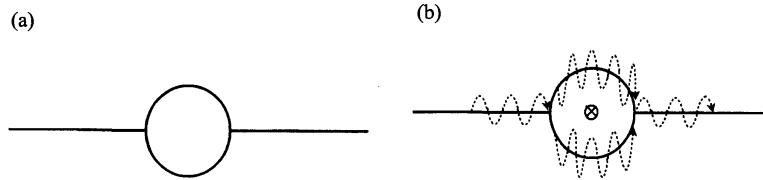


図 1: (a) 一つの Aharonov-Bohm リングと二本のリードからなる量子デバイス. (b) リードの片方から単電子の波動関数を流すと, Aharonov-Bohm リングで波動関数はスプリットし, もう一方のリードでそれぞれの波動関数の重ね合わせとなる. このとき, Aharonov-Bohm リングの輪の中に磁場をかけると, 波動関数の重ね合わせに Aharonov-Bohm 効果が現れる.

Webb らは Aharonov-Bohm 効果を用いてリードの電子の輸送を制御することに成功したのである. 大雑把には, 図1(b)のように, リードと Aharonov-Bohm リングとが成す一方の境界でスプリットされる波動関数  $\varphi_1(\vec{x})$  と  $\varphi_2(\vec{x})$  が他方の境界で再び出会い重ね合わせ  $\psi(\vec{x})$  を作るとすると, Aharonov-Bohm 効果の影響を考慮し,

$$\psi(\vec{x}) = \varphi_1(\vec{x})e^{-i\frac{e}{\hbar c}\int_{\sim}\vec{A}\cdot d\vec{x}} + \varphi_2(\vec{x})e^{-i\frac{e}{\hbar c}\int_{\sim}\vec{A}\cdot d\vec{x}}$$

と書ける. 今, 簡単のために例えば,  $\varphi(\vec{x}) := \varphi_1(\vec{x}) = \varphi_2(\vec{x})$  と仮定すると,

$$|\psi(\vec{x})|^2 = 2|\varphi(\vec{x})|^2 \left\{ 1 + \cos \left( -\frac{e}{\hbar c} \oint \vec{A} \cdot d\vec{x} \right) \right\}$$

となり, Aharonov-Bohm 位相  $\frac{e}{\hbar c} \oint \vec{A} \cdot d\vec{x}$  を得る. 従って, Aharonov-Bohm 位相が0ならば  $|\psi(\vec{x})|^2 = 4|\varphi(\vec{x})|^2$  であり, Aharonov-Bohm 位相が  $\pi$  ならば  $|\psi(\vec{x})|^2 = 0$  となり, 電子の存在確率が Aharonov-Bohm 位相により変化する. 従って, R. A. Webb らの実験から,

$$\text{位相因子により電子の輸送を制御できる可能性がある} \quad (\text{PE1})$$

という物理的期待が持てる訳である.

もう一つ別の物理的期待を計算物理の結果から紹介する. 図2(a)にあるY接合と呼ばれる, 三つの1次元ボース凝縮体を一点でY字型に接合した物理系を考える. 得能らはこのY接合をモデル化するため, 1次元ボース凝縮体を Tomonaga-Luttinger 液体理論におけるボソン化で記述する. このとき, 接合部分の点は境界条件によって物理的特性を記述する. このY接合を二つ用意し図2(b)のように Aharonov-Bohm リングを作り, 片方のリードから高密度の凝縮体を入射する. このとき, R. A. Webb らの結果のように Aharonov-Bohm 効果が境界条件の情報を通して期待されるが, 得能らの結果によると, Andreev 反射 [1, 2] のような現象が起こり, Andreev 反射の引き起こす位相と Aharonov-Bohm 位相が相殺さ

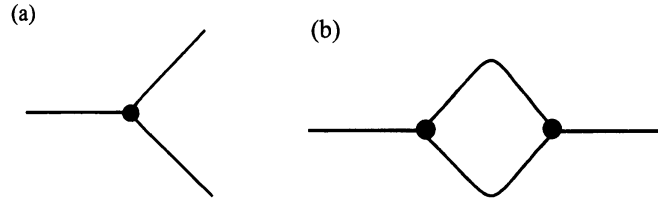


図 2: (a) 三つのリードを 1 次元ボース凝縮体とし、一点の接合で繋いで作る Y 接合. (b) Y 字の二本のリードの頭を繋ぎ、Aharonov-Bohm リングとそれぞれの接合でリードが繋がったデバイスを二つの Y 接合から作る.

れ、結果的に Aharonov-Bohm 効果が現れない. 得能らの結果が示唆するのは、Andreev 反射のように、

物理系によっては境界条件に位相因子が出現する可能性がある (PE2)

ということである. ここで、Andreev 反射のイメージを図 3 に記した.

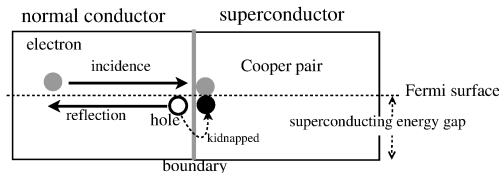


図 3: Andreev 反射とは、常電導体と超伝導体の接する境界面の部分で起こる基本的な現象で、入射波と反射波の位相差が波動関数に現れる. 簡単にその物理的メカニズムを記すと、常伝導体から一個の電子が超伝導体に侵入した瞬間、その電子は超伝導体内で Cooper 対を直ぐに形成せねばならず、その相棒を探すことになる. ところが、超伝導体内の全ての電子は既に Cooper 対を形成しているので、結局その電子は相棒の電子を常伝導体から誘拐することになる. この誘拐された電子が常伝導体内にホールを作るが、常伝導体から超伝導体に侵入した電子の代わりに反射となり位相差を生む. 超伝導体による巨視的位相を  $\vartheta$ 、単電子のエネルギーを  $E_{el}$ 、超伝導エネルギー・ギャップを  $\Delta_0$  とすると、Andreev 反射による位相差は  $-\vartheta - \cos^{-1}(E_{el}/\Delta_0)$  となる.

上述の二つの物理的期待 (PE1) と (PE2) を基に、図 4 にあるような一つの接合の左右に量子細線 (リード) を付けた量子デバイスのユニット、そしてその数学的機構を考えてみることもできるであろう [14]. このユニット内の単電子を本稿では扱う. 現在のテクノロ

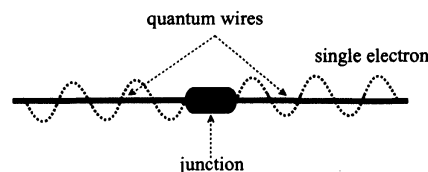


図 4: 一つの接合の左右に量子細線 (リード) を付けた量子デバイスのユニット.

ジーは単電子の輸送やそのスピンの操作を可能にしていることを注意しておく [9, 18, 26].  
そこで、本稿で考える問題は

問題 1: 接合と量子細線との成す境界において、波動関数の境界条件に位相因子が出現することはあるか?

問題 2: もし位相因子が出現するのであれば、それはどのようなときか?

である。ここで、接合に物理的・数学的任意性を与えるため、ブラック・ボックスとして扱う。このユニットに量子デバイスの機能を持たせるには、接合に量子ビットの情報の制御部や記憶部を設定する必要があるが、本稿ではその設定は考えない。量子デバイス作成を目指す実験物理学による基本的実験から、理論物理学による解釈と解析を経由して、数理科学を用いたモデリングと解析に関する最先端の話題を共有するためのワークショップを Interdisciplinary Workshop on Quantum Device (IWQD) と題して開催して来ているが [16], IWQD を含め本稿がこの分野への数理科学の積極的な参加を促すものとなれば幸いである。

## 2 1次元接合模型

本稿では、数学的に最も簡単な場合として、1次元接合模型を扱う。開集合  $\Omega \subset \mathbb{R}$  に対して、その閉包を  $\bar{\Omega}$  で表す。関数空間  $AC^1(\bar{\Omega})$  と  $AC_0^1(\bar{\Omega})$  を

$$AC^1(\bar{\Omega}) := \left\{ f \in L^2(\Omega) \mid f \text{ は } \bar{\Omega} \text{ 上で絶対連続で } f' \in L^2(\Omega) \right\},$$

$$AC_0^1(\bar{\Omega}) := \left\{ f \in AC^1(\bar{\Omega}) \mid f(x) = 0, \forall x \in \partial\Omega \right\},$$

で、関数空間  $AC^2(\bar{\Omega})$  と  $AC_0^2(\bar{\Omega})$  を

$$AC^2(\bar{\Omega}) := \left\{ f \in L^2(\Omega) \mid f \text{ と } f' \text{ は } \bar{\Omega} \text{ 上で絶対連続で } f'' \in L^2(\Omega) \right\},$$

$$AC_0^2(\bar{\Omega}) := \left\{ f \in AC^1(\bar{\Omega}) \mid f(x) = f'(x) = 0, \forall x \in \partial\Omega \right\},$$

で定義しておく。

可分な Hilbert 空間  $\mathcal{H}$  上の作用素  $A$  に対して、その定義域を  $D(A)$  と記す。また、部分空間  $\mathcal{D} \subset D(A)$  に対して、 $A$  の  $\mathcal{D}$  上への制限を  $A|_{\mathcal{D}}$  と記す。特に、 $A$  が閉作用素のとき、不足部分空間  $\mathcal{K}_{\pm}(A)$  を

$$\mathcal{K}_{\pm}(A) := \ker(\pm i - A^*)$$

で定義し、不足指数  $n_{\pm}(A)$  を

$$n_{\pm}(A) := \dim \mathcal{K}_{\pm}(A)$$

で与える。

よく知られた von Neumann の理論 [20, 28] による次の命題を我々の拠り所とする：

**命題 2.1**  $A_0$  を閉対称作用素とする.

i)  $n_+(A_0) = n_-(A_0)$  ならば,  $A_0$  は自己共役拡張を持つ.

ii)  $A_0$  の自己共役拡張全体と  $\mathcal{K}_+(A_0)$  から  $\mathcal{K}_-(A_0)$  へのユニタリ作用素全体との間には一対一対応があり, その対応は次のように与えられる: 各ユニタリ作用素  $U : \mathcal{K}_+(A_0) \rightarrow \mathcal{K}_-(A_0)$  に対し, 作用素  $A_U$  を

$$\begin{cases} D(A_U) := \{\psi = \psi_0 + \psi^+ + U\psi^+ \mid \psi_0 \in D(A_0), \psi^+ \in \mathcal{K}_+(A_0)\}, \\ A_U := A_0^*[D(A_U)], \end{cases}$$

で定義すると,  $A_U$  は  $A_0$  の自己共役拡張で, その作用は

$$A_U(\psi_0 + \psi^+ + U\psi^+) = A_0\psi_0 + i\psi^+ - iU\psi^+$$

である. 逆に,  $A_0$  の各自己共役拡張  $A$  に対し, ユニタリ作用素  $U : \mathcal{K}_+(A_0) \rightarrow \mathcal{K}_-(A_0)$  が存在して  $A = A_U$  をみたす.

今  $n_+(A_0) = n_-(A_0) = n \in \mathbb{N}$  とし,  $\mathcal{K}_\pm(A_0)$  の完全正規直交基底  $\{\psi_j^\pm\}_{j=1}^n$  を一つ固定する. このとき, ユニタリ作用素  $U : \mathcal{K}_+(A_0) \rightarrow \mathcal{K}_-(A_0)$  を対応

$$U : \psi_j^+ \mapsto \sum_{k=1}^n u_{jk} \psi_k^-, \quad j = 1, \dots, n,$$

によって,  $n \times n$  ユニタリ行列  $(u_{jk})_{j,k=1,\dots,n}$  とみなせる. そこで以下,  $U \in U(n)$  と表す. もし非対角成分が全て 0 (i.e.,  $u_{jk} = 0$ ,  $j \neq k$ ) のとき,  $U$  は対角であるといい, そうでないときは,  $U$  は非対角であるということにする.

各  $\Lambda > 0$  に対して, 半直線  $\Omega_{\Lambda,L} := (-\infty, -\Lambda)$  を左の島, 半直線  $\Omega_{\Lambda,R} := (+\Lambda, +\infty)$  を右の島と呼ぶことにし, 本稿で考える配位空間を

$$\Omega_\Lambda := \Omega_{\Lambda,L} \cup \Omega_{\Lambda,R}$$

で与える. このとき, 我々の粒子の状態空間は Hilbert 空間  $\mathbb{C}^2 \otimes L^2(\Omega_\Lambda)$  で, 線分  $[-\Lambda, +\Lambda]$  が接合となる.

**定義 2.2** 1次元最小 *Schrödinger* 作用素  $H_{S0}$  を

$$\begin{cases} D(H_{S0}) := AC_0^2(\overline{\Omega_\Lambda}), \\ H_{S0} := p^2, \end{cases}$$

で定義する. ただし,  $p$  は  $p := -i \frac{d}{dx}$  で与えられる運動量作用素である.

$H_{S0}$  は閉対称で、その共役作用素  $H_{S0}^*$  は

$$\begin{cases} D(H_{S0}^*) = AC^2(\overline{\Omega_\Lambda}), \\ H_{S0}^* = p^2, \end{cases}$$

となる。ただし、 $p^* = -i\frac{d}{dx}$ 。

Dirac 作用素を定義する前に、関数空間  $\mathcal{AC}(\overline{\Omega_\Lambda})$  と  $\mathcal{AC}_0(\overline{\Omega_\Lambda})$  を、各  $\Lambda > 0$  に対して、

$$\begin{aligned} \mathcal{AC}(\overline{\Omega_\Lambda}) &:= \mathbb{C}^2 \hat{\otimes} AC^1(\overline{\Omega_\Lambda}), \\ \mathcal{AC}_0(\overline{\Omega_\Lambda}) &:= \mathbb{C}^2 \hat{\otimes} AC_0^1(\overline{\Omega_\Lambda}), \end{aligned}$$

で与えておく。ただし、 $\hat{\otimes}$  は代数的テンソル積を表す。

今、1次元配位空間  $\Omega_\Lambda$  を運動する相対論的粒子に対する量子化を考える。Dirac の処方箋に従えば、波動関数に対して確率解釈を行うために、

$$\alpha^2 = \beta^2 = I \quad \text{かつ} \quad \alpha\beta + \beta\alpha = 0$$

をみたす行列  $\alpha$  と  $\beta$  を適当に見つけ、エネルギー作用素が  $\alpha \otimes p + \beta \otimes mI$  の形になる量子化の表現を見つける必要がある。ここで、 $m$  は相対論的粒子の質量で  $I$  は恒等作用素である。行列  $\beta$  を

$$\beta = \sigma_z$$

としたときに、行列  $\alpha$  の候補として

$$\alpha = \sigma_x \quad \text{または} \quad \sigma_y$$

が挙げられるが、本稿では、 $\alpha$  として  $\sigma_x$  を採用する。ここで、 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  は Pauli のスピン行列である：

$$\sigma_x := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

**定義 2.3** Dirac 粒子の質量  $m \geq 0$  と運動量作用素  $p$  に対して、1次元最小 Dirac 作用素  $H_{D0}$  を

$$\begin{cases} D(H_{D0}) := \mathcal{AC}_0(\overline{\Omega_\Lambda}), \\ H_{D0} := \sigma_x \otimes p + m\sigma_z \otimes I_{L^2(\Omega_\Lambda)}, \end{cases}$$

で定義する。

$H_{D0}$  は閉対称で、その共役作用素  $H_{D0}^*$  は次のようになる：

$$\begin{cases} D(H_{D0}^*) = \mathcal{AC}(\overline{\Omega_\Lambda}), \\ H_{D0}^* = \sigma_x \otimes p^* + m\sigma_z \otimes I_{L^2(\Omega_\Lambda)}, \end{cases}$$

以下、波動関数  $\psi \in \mathbb{C}^2 \otimes L^2(\Omega_\Lambda)$  に対して、上向きスピンを持った波動関数  $\psi_\uparrow$  と、下向きスピンを持った波動関数  $\psi_\downarrow$  を、それぞれ

$$\psi_\uparrow := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \psi, \quad \psi_\downarrow := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \psi$$

と表現しておく。

論文 [8] で、1次元最小 Schrödinger 作用素  $H_{S0}$  の自己共役拡張の波動関数に対して、二種類の境界条件が提案された。そのうちの一つは波動関数が接合を通り抜けないものであり、もう一つは接合をトンネルするものである。更に、前者の場合には見られないが、後者の場合には境界条件の中に位相因子  $e^{i\theta}$  が出現することが示された。ただ、論文 [8] においては、位相因子の出現と波動関数のトンネル効果との間の完全な数学的関係は明らかにされなかった。論文 [14, 15] では、この問題を 1次元最小 Schrödinger 作用素と 1次元最小 Dirac 作用素に対して解決した。これらの論文では、自己共役拡張と波動関数の境界条件との間の一対一対応を具体的に明らかにすることで、境界条件にどのように位相因子が現れ、波動関数のトンネリングでどのように位相が決まるのかを数学的に解明した。

簡単な計算により、1次元最小 Schrödinger 作用素  $H_{S0}$  と 1次元最小 Dirac 作用素  $H_{D0}$  の不足指数は、 $n_+(H_{\#0}) = n_-(H_{\#0}) = 2$  となることが分かる。従って、命題 2.1 より、 $H_{\#0}$ ,  $\# = D, S$ , は自己共役拡張を持つ。

## 2.1 Schrödinger 粒子に対する境界条件

拡張された実数全体の集合を  $\overline{\mathbb{R}}$  で表す。すなわち、 $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ 。二つのパラメータ  $\rho_\pm$  からなるベクトル  $\rho = (\rho_+, \rho_-) \in \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$  に対して、次のような左の島と右の島の境界の情報が独立した境界条件を導入する：

$$(\text{isolation}) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \rho_+ \psi(+\Lambda) = \psi'(+\Lambda) & \text{if } \rho_+ \in \mathbb{R}, \\ \psi(+\Lambda) = 0 & \text{if } \rho_+ = \infty, \\ \hline \rho_- \psi(-\Lambda) = \psi'(-\Lambda) & \text{if } \rho_- \in \mathbb{R}, \\ \psi(-\Lambda) = 0 & \text{if } \rho_- = \infty. \end{array} \right. \quad (S\rho)$$

また、四つのパラメータ  $\alpha_j$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ , からなるベクトル  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in \mathbb{C}^4$  が条件

$$\begin{cases} \alpha_1 \alpha_3^*, \alpha_2 \alpha_4^* \in \mathbb{R}, \\ \alpha_1 \alpha_4^* - \alpha_2 \alpha_3^* = 1, \end{cases}$$

をみたすとき、 $\alpha \in \mathfrak{A}_S$  と記す。

任意の  $\alpha \in \mathfrak{A}_S$  に対して境界行列  $B_\alpha \in M_2(\mathbb{C})$  を

$$B_\alpha := \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix}$$



で与える. この境界行列により左の島と右の島の境界の情報を交換する境界条件を

$$(\text{interchange}) \quad B_\alpha \begin{pmatrix} \psi(-\Lambda) \\ \psi'(-\Lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi(+\Lambda) \\ \psi'(+\Lambda) \end{pmatrix} \quad (S\alpha)$$

で導入する.

## 2.2 Dirac 粒子に対する境界条件

二つのパラメータ  $\rho_\pm$  からなるベクトル  $\rho = (\rho_+, \rho_-) \in \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$  に対して, 次のような左の島と右の島の境界の情報が独立した境界条件を導入する:

$$(\text{isolation}) \quad \begin{cases} i\rho_+ \psi_\uparrow(+\Lambda) = \psi_\downarrow(+\Lambda) & \text{if } \rho_+ \in \mathbb{R}, \\ \psi_\uparrow(+\Lambda) = 0 & \text{if } \rho_+ = \infty, \\ \hline i\rho_- \psi_\uparrow(-\Lambda) = \psi_\downarrow(-\Lambda) & \text{if } \rho_- \in \mathbb{R}, \\ \psi_\uparrow(-\Lambda) = 0 & \text{if } \rho_- = \infty. \end{cases} \quad (D\rho)$$

四つのパラメータ  $\alpha_j$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ , からなるベクトル  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in \mathbb{C}^4$  が条件

$$\begin{cases} \Re(\alpha_1 \alpha_2^*) = \Re(\alpha_1 \alpha_3^*) = 0, \\ \Re(\alpha_2 \alpha_4^*) = \Re(\alpha_3 \alpha_4^*) = 0, \\ \alpha_1 \alpha_4^* + \alpha_2 \alpha_3^* = \alpha_1 \alpha_4^* + \alpha_2^* \alpha_3 = 1, \end{cases}$$

をみたすとき,  $\alpha \in \mathfrak{A}_D$  と記す.

任意の  $\alpha \in \mathfrak{A}_D$  に対して境界行列  $B_\alpha \in M_2(\mathbb{C})$  を

$$B_\alpha := \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix}$$

とし, 左の島と右の島の境界の情報を交換する境界条件を

$$(\text{interchange}) \quad B_\alpha \begin{pmatrix} \psi_\uparrow(-\Lambda) \\ \psi_\downarrow(-\Lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_\uparrow(+\Lambda) \\ \psi_\downarrow(+\Lambda) \end{pmatrix} \quad (D\alpha)$$

で導入する.

## 3 主結果

まず, 前章で与えた二種類の境界条件は, 次のように自己共役拡張を与える:

定理 3.1 [8, 14, 15] 以下,  $\sharp = S, D$  とする.

i) (B.C. with isolation) 任意の  $\rho \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  に対して定義域  $D(H_{\sharp\rho})$  を

$$D(H_{\sharp\rho}) := \left\{ \psi \in D(H_{\sharp 0}^*) \mid \psi \text{ は } (\sharp\rho) \text{ をみたす} \right\}$$

で与えたとき,  $H_{\sharp\rho} := H_{\sharp 0}^* \upharpoonright D(H_{\sharp\rho})$  は  $H_{\sharp 0}$  の自己共役拡張である.

ii) (B.C. with interchange) 任意の  $\alpha \in \mathfrak{A}_{\sharp}$  に対して定義域  $D(H_{\sharp\alpha})$  を

$$D(H_{\sharp\alpha}) := \left\{ \psi \in D(H_{\sharp 0}^*) \mid \psi \text{ は } (\sharp\alpha) \text{ をみたす} \right\}$$

で与えたとき,  $H_{\sharp\alpha} := H_{\sharp 0}^* \upharpoonright D(H_{\sharp\alpha})$  は  $H_{\sharp 0}$  の自己共役拡張である.

定理 3.1 は, 二種類の境界条件  $(\sharp\rho)$  と  $(\sharp\alpha)$  は  $H_{\sharp 0}$  の自己共役拡張を与えることを主張しているが, ここで, 「他の種類の境界条件で自己共役拡張を与えるものがあるのか?」という疑問が生じる. これに対する答えを見て行く. そのために, 以下の議論で使うユニタリ群  $U(2)$  の表現を与える. 通常, 準同型定理により  $U(n)/SU(n) \cong U(1)$  なる表現はよく知られているが, ここでは  $n = 2$  という具体的な値を上手く使い別な表現を与える:

補題 3.2 [14] ユニタリ群  $U(2)$  は次の表現を持つ:

$$U(2) = U(1) S\mathbb{H} = \left\{ \gamma_3 \begin{pmatrix} \gamma_1 & -\gamma_2^* \\ \gamma_2 & \gamma_1^* \end{pmatrix} \mid \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \mathbb{C}, |\gamma_1|^2 + |\gamma_2|^2 = |\gamma_3| = 1 \right\}.$$

ここで,  $2 \times 2$  行列からなる *Hamilton* の四元数体  $\mathbb{H}$  に対して,  $S\mathbb{H} := \{A \in \mathbb{H} \mid \det A = 1\}$ .

補題 3.2 を通すと, von Neumann の理論において自己共役拡張をパラメータ化する  $U \in U(2)$  に対し, 次のような物理的意味を与えることができる.

### 3.1 Schrödinger 粒子の場合

定数  $N_S$  を  $N_S := \sqrt[4]{2}e^{\Lambda/\sqrt{2}}$  としておく. 左の島上の  $H_{S_0}^*$  の固有関数  $L_{\pm}(x)$  (i.e,  $H_{S_0}^* L_{\pm} = \pm i L_{\pm}$ ) を

$$\begin{cases} L_+(x) := N_S e^{(1-i)x/\sqrt{2}} \chi_L(x), \\ L_-(x) := N_S e^{(1+i)x/\sqrt{2}} \chi_L(x), \end{cases}$$

で, 右の島上の  $H_{S_0}^*$  の固有関数  $R_{\pm}(x)$  (i.e,  $H_{S_0}^* R_{\pm} = \pm i R_{\pm}$ ) を

$$\begin{cases} R_+(x) := N_S e^{(-1+i)x/\sqrt{2}} \chi_R(x), \\ R_-(x) := N_S e^{(-1-i)x/\sqrt{2}} \chi_R(x), \end{cases}$$

で与えることができる。ここで、 $\chi_L$  は  $\overline{\Omega_{\Lambda,L}}$  の、 $\chi_R$  は  $\overline{\Omega_{\Lambda,R}}$  の特性関数。  
ユニタリ行列  $U = (u_{k\ell})_{k,\ell=1,2}$  の成分  $u_{k\ell}$  を

$$\begin{cases} UL_+ = u_{11}L_- + u_{12}R_-, \\ UR_+ = u_{21}L_- + u_{22}R_-, \end{cases}$$

で与える。すると、補題 3.2 により、

$$\begin{cases} UL_+ = \gamma_3\gamma_1L_- - \gamma_3\gamma_2^*R_-, \\ UR_+ = \gamma_3\gamma_2L_- + \gamma_3\gamma_1^*R_-, \end{cases}$$

であるから、波動関数  $\psi = \psi_0 + c_L L_+ + c_R R_+ + c_L UL_+ + c_R UR_+$  に対して

$$\begin{cases} c_R = 0 \implies \psi = \psi_0 + c_L \gamma_3 (L_+ + \gamma_1 L_- - \gamma_2^* R_-), \\ c_L = 0 \implies \psi = \psi_0 + c_R \gamma_3 (R_+ + \gamma_2 L_- + \gamma_1^* R_-), \end{cases}$$

となるので、パラメータ  $\gamma_1$  は Schrödinger 粒子の波動関数の境界での反射を司る反射パラメータ、また、パラメータ  $\gamma_2$  は波動関数の接合のトンネリングを司るトンネリング・パラメータである。

**定理 3.3** [14]

i) 対角な  $U \in U(2)$  は、全て  $U = \begin{pmatrix} \gamma_L & 0 \\ 0 & \gamma_R \end{pmatrix}$ ,  $\gamma_L = \gamma_3\gamma_1$ ,  $\gamma_R = \gamma_3\gamma_1^*$  なる表現を持ち、 $|\gamma_1| = |\gamma_3| = 1$  をみたす補題 3.2 の任意のパラメータ  $\gamma_1, \gamma_3$  に対して、 $D(H_U) = D(H_{S\rho})$  であるための必要十分条件は次の公式で与えられるベクトル  $\rho \in \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$  との対応となる：

(S-L1) 任意の  $\gamma_L \neq -e^{i\sqrt{2}\Lambda}$  に対して、

$$\rho_- = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \tan \left( \frac{\theta_L}{2} - \frac{\Lambda}{\sqrt{2}} \right) - 1 \right\}, \quad \theta_L := \arg \gamma_L.$$

(S-L2)  $\gamma_L = -e^{i\sqrt{2}\Lambda}$  に対して、 $\rho_- = \infty$ .

(S-R1) 任意の  $\gamma_R \neq -e^{i\sqrt{2}\Lambda}$  に対して、

$$\rho_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \tan \left( \frac{\theta_R}{2} - \frac{\Lambda}{\sqrt{2}} \right) - 1 \right\}, \quad \theta_R := \arg \gamma_R.$$

(S-R2)  $\gamma_R = -e^{i\sqrt{2}\Lambda}$  に対して、 $\rho_+ = \infty$ .

ii) 非対角な  $U \in U(2)$  は、全て  $U = \gamma_3 \begin{pmatrix} \gamma_1 & -\gamma_2^* \\ \gamma_2 & \gamma_1^* \end{pmatrix}$ ,  $|\gamma_1|^2 + |\gamma_2|^2 = |\gamma_3| = 1$ ,  $\gamma_2 \neq 0$  なる表現を持ち、 $|\gamma_1|^2 + |\gamma_2|^2 = |\gamma_3| = 1$  かつ  $\gamma_2 \neq 0$  をみたす補題 3.2 の任意のパラ

メータ  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  に対して,  $D(H_U) = D(H_{S\alpha})$  であるための必要十分条件は, 次の公式で与えられるベクトル  $\alpha \in \mathfrak{A}_S$  との対応となる:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= i\sqrt{2}\gamma_2^{-1} \left( \Re(e^{i\pi/4}\gamma_1) + \Re(e^{i(\pi/4-\sqrt{2}\Lambda)}\gamma_3) \right), \\ \alpha_2 &= -i\sqrt{2}\gamma_2^{-1} \left( \Re\gamma_1 + \Re(e^{-i\sqrt{2}\Lambda}\gamma_3) \right), \\ \alpha_3 &= -i\sqrt{2}\gamma_2^{-1} \left( \Re\gamma_1 + \Re(e^{i(\pi/2-\sqrt{2}\Lambda)}\gamma_3) \right), \\ \alpha_4 &= i\sqrt{2}\gamma_2^{-1} \left( \Re(e^{-i\pi/4}\gamma_1) + \Re(e^{i(\pi/4-\sqrt{2}\Lambda)}\gamma_3) \right).\end{aligned}$$

定理 3.3 は, 自己共役拡張をパラメータ化する  $U \in U(2)$  を決めるパラメータ  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  によって, 境界条件を決めるパラメータ  $\rho \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  と  $\alpha \in \mathfrak{A}_S$  をそれぞれ与える公式であるが, この逆の公式は以下ようになる.

任意の  $\rho \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  に対して, 対角な  $U \in U(2)$  は

$$(S-L1') \quad \rho_- \in \mathbb{R} \text{ のとき, } \gamma_L = \exp \left[ 2i \left( \tan^{-1} (1 - \sqrt{2}\rho_-) + \Lambda/\sqrt{2} \right) \right].$$

$$(S-L2') \quad \rho_- = \infty \text{ のとき, } \gamma_L = -e^{i\sqrt{2}\Lambda}.$$

$$(S-R1') \quad \rho_+ \in \mathbb{R} \text{ のとき, } \gamma_R = \exp \left[ 2i \left( \tan^{-1} (1 + \sqrt{2}\rho_+) + \Lambda/\sqrt{2} \right) \right].$$

$$(S-R2') \quad \rho_+ = \infty \text{ のとき, } \gamma_R = -e^{i\sqrt{2}\Lambda}.$$

なる公式で決まる.

任意の  $\alpha \in \mathfrak{A}_S$  に対して, 非対角な  $U \in U(2)$  は次の命題で与えられる:

**命題 3.4** [14] 任意の  $B_\alpha$ ,  $\alpha \in \mathfrak{A}_S$ , に対して, 非対角な  $U \in U(2)$  は次の公式で決まる:

$$\begin{cases} \gamma_1 = \Gamma_0 e^{-i\theta} (e^{i\pi/4}\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + e^{-i\pi/4}\alpha_4), \\ \gamma_2 = -i\sqrt{2}\Gamma_0 e^{-i\theta}, \\ \gamma_3 = -\Gamma_0 e^{i(\sqrt{2}\Lambda-\theta)} (e^{-i\pi/4}\alpha_1 - i\alpha_2 + \alpha_3 + e^{-i\pi/4}\alpha_4). \end{cases}$$

ここで,

$$\Gamma_0 := \left\{ \left| e^{i\pi/4}\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + e^{-i\pi/4}\alpha_4 \right|^2 + 2 \right\}^{1/2}.$$

また,  $\theta$  は命題 3.5 にあるように  $\alpha_j = e^{i\theta} a_j$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ , とする位相である.

命題 3.4 に現れた位相は以下のようにして  $B_\alpha$ ,  $\alpha \in \mathfrak{A}_S$ , から決まる:

**命題 3.5** 境界行列  $B_\alpha$ ,  $\alpha \in \mathfrak{A}_S$ , 全体の集合を  $\mathcal{A}$  とする. このとき,  $\alpha_1 \neq 0$  または  $\alpha_2 \neq 0$  であり,  $\alpha_1 \neq 0$  のとき  $\alpha_j$  を  $\alpha_1$ ,  $\alpha_1 = 0$  のとき  $\alpha_j$  を  $\alpha_2$  とおき,  $\theta \in [0, 2\pi)$  と  $a_k$ ,  $k \neq j$ , を

$$\begin{cases} \theta := \arg(\alpha_j/|\alpha_j|); \\ a_j := |\alpha_j|, \quad a_k := \alpha_k \alpha_j^* / |\alpha_j|, \quad k \neq j, \end{cases}$$

と決めると,  $\mathcal{A}$  は次の表現を持つ:

$$\mathcal{A} = \left\{ e^{i\theta} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \mid \theta \in [0, 2\pi), a_j \in \mathbb{R}, j = 1, 2, 3, 4; a_1 a_4 - a_2 a_3 = 1 \right\}.$$

### 3.2 Dirac 粒子の場合

定数  $\mu$  を  $\mu := (1 + im)/\sqrt{1 + m^2}$ , 定数  $N_D$  を  $N_D := (1 + m^2)^{\frac{1}{4}} e^{-\sqrt{1+m^2}\Lambda}$  とする. 左の島上の  $H_{D0}^*$  の固有関数  $\psi_L^\pm(x)$  (i.e.,  $H_{D0}^* \psi_L^\pm = \pm i \psi_L^\pm$ ) を

$$\begin{cases} \psi_L^+(x) := N_D \begin{pmatrix} 1 \\ -\mu \end{pmatrix} \otimes \chi_L(x) e^{\sqrt{1+m^2}x}, \\ \psi_L^-(x) := N_D \begin{pmatrix} 1 \\ \mu^* \end{pmatrix} \otimes \chi_L(x) e^{\sqrt{1+m^2}x}, \end{cases}$$

で定義する. ここで,  $\chi_L$  は  $\overline{\Omega_{\Lambda,L}}$  の特性関数. また, 右の島上の  $H_{D0}^*$  の固有関数  $\psi_R^\pm(x)$  (i.e.,  $H_{D0}^* \psi_R^\pm = \pm i \psi_R^\pm$ ) を

$$\begin{cases} \psi_R^+(x) := N_D \begin{pmatrix} 1 \\ \mu \end{pmatrix} \otimes \chi_R(x) e^{-\sqrt{1+m^2}x}, \\ \psi_R^-(x) := N_D \begin{pmatrix} 1 \\ -\mu^* \end{pmatrix} \otimes \chi_R(x) e^{-\sqrt{1+m^2}x}, \end{cases}$$

で定義する. ここで,  $\chi_R$  は  $\overline{\Omega_{\Lambda,R}}$  の特性関数.

ユニタリ行列  $U = (u_{k\ell})_{k,\ell=1,2}$  の成分  $u_{k\ell}$  を

$$\begin{cases} U\psi_L^+ = u_{11}\psi_L^- + u_{12}\psi_R^-, \\ U\psi_R^+ = u_{21}\psi_L^- + u_{22}\psi_R^-, \end{cases}$$

で与える. すると, 補題 3.2 により,

$$\begin{cases} U\psi_L^+ = \gamma_3 \gamma_1 \psi_L^- - \gamma_3 \gamma_2^* \psi_R^-, \\ U\psi_R^+ = \gamma_3 \gamma_2 \psi_L^- + \gamma_3 \gamma_1^* \psi_R^-, \end{cases}$$

であるから, Schrödinger 粒子のときと同様, パラメータ  $\gamma_1$  は Dirac 粒子の波動関数の境界での反射を司る反射パラメータ, また, パラメータ  $\gamma_2$  は波動関数の接合のトンネリングを司るトンネリング・パラメータである.

## 定理 3.6 [15]

i) 対角な  $U \in U(2)$  は, 全て  $U = \begin{pmatrix} \gamma_L & 0 \\ 0 & \gamma_R \end{pmatrix}$ ,  $\gamma_L = \gamma_3 \gamma_1$ ,  $\gamma_R = \gamma_3 \gamma_1^*$  なる表現を持ち,  $|\gamma_1| = |\gamma_3| = 1$  をみたす補題 3.2 の任意のパラメータ  $\gamma_1, \gamma_3$  に対して,  $D(H_U) = D(H_{D\rho})$  であるための必要十分条件は次の公式で与えられるベクトル  $\rho \in \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$  との対応となる:

(D-L1) 任意の  $\gamma_L \neq -1$  に対して,

$$\rho_- = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \left( \tan \frac{\theta_L}{2} - m \right), \quad \theta_L := \arg \gamma_L \in [0, 2\pi).$$

(D-L2)  $\gamma_L = -1$  に対して,  $\rho_- = \infty$ .

(D-R1) 任意の  $\gamma_R \neq -1$  に対して,

$$\rho_+ = -\frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \left( \tan \frac{\theta_R}{2} - m \right), \quad \theta_R := \arg \gamma_R.$$

(D-R2)  $\gamma_R = -1$  に対して,  $\rho_+ = \infty$ .

ii) 非対角な  $U \in U(2)$  は, 全て  $U = \gamma_3 \begin{pmatrix} \gamma_1 & -\gamma_2^* \\ \gamma_2 & \gamma_1^* \end{pmatrix}$ ,  $|\gamma_1|^2 + |\gamma_2|^2 = |\gamma_3| = 1$ ,  $\gamma_2 \neq 0$  なる表現を持ち,  $|\gamma_1|^2 + |\gamma_2|^2 = |\gamma_3| = 1$  かつ  $\gamma_2 \neq 0$  をみたす補題 3.2 の任意のパラメータ  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  に対して,  $D(H_U) = D(H_{D\alpha})$  であるための必要十分条件は, 次の公式で与えられるベクトル  $\alpha \in \mathfrak{A}_D$  との対応となる:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= i\gamma_2^{-1} \sqrt{1+m^2} (\Im(\gamma_1^* \mu) + \Im(\gamma_3^* \mu)), \\ \alpha_2 &= \gamma_2^{-1} \sqrt{1+m^2} (\Re \gamma_1 + \Re \gamma_3), \\ \alpha_3 &= \gamma_2^{-1} \sqrt{1+m^2} (-\Re \gamma_1 + \Re(\gamma_3^* \mu^2)), \\ \alpha_4 &= i\gamma_2^{-1} \sqrt{1+m^2} (\Im(\gamma_1 \mu) + \Im(\gamma_3^* \mu)). \end{aligned}$$

任意の  $\rho \in \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$  に対して, 対角な  $U \in U(2)$  は

$$(D-L1') \rho_- \in \mathbb{R} \text{ のとき, } \gamma_L = \exp [2i \arctan (m + \sqrt{1+m^2} \rho_-)].$$

$$(D-L2') \rho_- = \infty \text{ のとき, } \gamma_L = -1.$$

$$(D-R1') \rho_+ \in \mathbb{R} \text{ のとき, } \gamma_R = \exp [2i \arctan (m - \sqrt{1+m^2} \rho_+)].$$

$$(D-R2') \rho_+ = \infty \text{ のとき, } \gamma_R = -1.$$

なる公式で決まる.

任意の  $\alpha \in \mathfrak{A}_D$  に対して, 非対角な  $U \in U(2)$  は次の命題で決まる:

命題 3.7 [15] 任意の  $B_\alpha$ ,  $\alpha \in \mathfrak{A}_D$ , に対して, 非対角な  $U \in U(2)$  は次の公式で決まる:

$$\begin{cases} \gamma_1 = \Gamma_0 e^{-i(\theta-\pi/2)} (-\mu^* \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \mu \alpha_4), \\ \gamma_2 = (2/\sqrt{1+m^2}) \Gamma_0 e^{-i(\theta-\pi/2)}, \\ \gamma_3 = \Gamma_0 e^{-i(\theta-\pi/2)} \mu (\alpha_1 + \mu^* \alpha_2 + \mu \alpha_3 + \alpha_4)^*. \end{cases}$$

ここで,

$$\Gamma_0 := \left( \frac{4}{1+m^2} + \left| -\mu^* \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \mu \alpha_4 \right|^2 \right)^{-1/2}.$$

また,  $\theta$  は命題 3.8 にあるように  $\alpha_j = e^{i\theta} a_j$ ,  $j = 1, 4$ ;  $\alpha_k = i e^{i\theta} a_k$ ,  $j = 2, 3$ , となる位相である.

命題 3.7 に現れた位相は以下のようにして  $B_\alpha$ ,  $\alpha \in \mathfrak{A}_D$ , から決まる:

命題 3.8 境界行列  $B_\alpha$ ,  $\alpha \in \mathfrak{A}_D$ , 全体の集合を  $\mathcal{A}$  とする. このとき,  $\alpha_1 \neq 0$  または  $\alpha_3 \neq 0$  であり,  $\alpha_1 \neq 0$  のとき

$$\begin{cases} \theta := \arg(\alpha_1/|\alpha_1|); \\ a_1 := |\alpha_1|, \quad a_2 := -i(\alpha_1 \alpha_2^*)^*/|\alpha_1|, \\ a_3 := -i(\alpha_1 \alpha_3^*)^*/|\alpha_1|, \quad a_4 := (\alpha_1 \alpha_4^*)^*/|\alpha_1|, \end{cases}$$

とおく. また,  $\alpha_1 = 0$  のとき

$$\begin{cases} \theta := \arg(-i\alpha_3/|\alpha_3|); \\ a_1 := i\alpha_1 \alpha_3^*/|\alpha_3|, \quad a_2 := \alpha_2 \alpha_3^*/|\alpha_3|, \\ a_3 := |\alpha_3|, \quad a_4 := i(\alpha_3 \alpha_4^*)^*/|\alpha_3|, \end{cases}$$

とおく. すると,  $\mathcal{A}$  は次の表現を持つ:

$$\mathcal{A} = \left\{ e^{i\theta} \begin{pmatrix} a_1 & ia_2 \\ ia_3 & a_4 \end{pmatrix} \mid \theta \in [0, 2\pi), a_j \in \mathbb{R}, j = 1, 2, 3, 4; \quad a_1 a_4 + a_2 a_3 = 1 \right\}.$$

注意 3.1 境界行列  $B_\alpha$ ,  $\alpha \in \mathfrak{A}_D$ , で決まる境界条件は, スピンに次のような影響を与える. 境界行列の成分  $ia_2$  と  $ia_3$  は上向きスピンと下向きスピンを入れ替える役割を持つ. これは, 量子ビットの反転の操作に係る.

注意 3.2 命題 3.8 による境界行列の表現と Benvegnú-Dąbrowski 四パラメータ族 [5],  $\omega \in \mathbb{C}$ ;  $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ , との間には次のような対応がある:

$$\begin{cases} \omega = e^{i\theta}; \\ A = a_1, \quad B = a_2, \quad C = -a_3, \quad D = a_4. \end{cases}$$

従って、次の系を得る：

**系 3.9** *Benvegnù-Dąbrowski* 四パラメータ族は、*von Neumann* の自己共役拡張の理論における、 $|\gamma_1|^2 + |\gamma_2|^2 = |\gamma_3| = 1$  かつ  $\gamma_2 \neq 0$  をみたす三つのパラメータ  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \mathbb{C}$  で決まる。

### 3.3 トンネリング位相

Schrödinger 粒子に対する命題 3.5 と Dirac 粒子に対する命題 3.8 で考察したように、Schrödinger 粒子と Dirac 粒子共通に、それぞれの波動関数が接合をトンネルするときに境界条件に位相因子  $e^{i\theta}$  が出現する。定理 3.3 と命題 3.4, 3.5, そして、定理 3.6 と命題 3.7, 3.8 から次の系を得るが、これは位相  $\theta$  はトンネリング・パラメータ  $\gamma_2$  から完全に決まるトンネル効果特有の位相であることを述べている。従って、 $\theta$  はトンネリング位相ともいふべきものである。

**系 3.10** *Schrödinger* 粒子と *Dirac* 粒子、両方の場合に、位相因子  $e^{i\theta}$  は、 $\gamma_2 \neq 0$  のとき、かつ、そのときに限り境界条件に出現し、位相  $\theta$  は、ある適当な  $\nu \in \mathbb{Z}$  に対して

$$\theta = -\arg \gamma_2 + \left(\frac{1}{2} + \nu\right) \pi$$

と表される。

## 4 今後の課題

本稿では、1次元接合模型のみを扱ったが、二つの不足指数が2となるため、 $2 \times 2$  ユニタリ行列に対する計算の工夫が本質的で、その工夫により波動関数の接合におけるトンネル効果とそれに伴った位相因子の出現が具体的に把握できた。この模型にリードの数を増やせば不足指数も増え、また、配位空間の次元を上げると、即、不足指数は可算無限になってしまう。また、次元を上げた場合は、境界の幾何学的性質やトポロジカルな性質が反映されて来るであろう。現在、このような問題に boundary triplet の理論 [4, 6, 21] から取り組んでいる。

また、本稿では接合をブラック・ボックスとし物理的・数学的に任意性を持たせたが、実際の量子デバイスを作成するためのモデリングを行う場合、接合部分に実際の物理系を設定しなければならない。この接合部分で量子ビットを制御する場合、本稿で述べたような、量子ビットを実現する電子のスピンと境界で出現する位相との関係を利用し、この位相と外から磁場を印加することでもたらされる Aharonov-Bohm 位相とを相互作用させるモデルを設定することも考えられるだろうし、また、電子のスピンから2準位原子の状態に変換する量子状態転写を設定し、cavity QED や circuit QED で扱う Jaynes-Cummings 模型や Rabi 模型等 [12] を設定することもできるだろう。数理科学としてモデルを設定し解析すべき問題は色々あるように思われる。



## 参考文献

- [1] A. F. ANDREEV, *Thermal conductivity of the intermediate state of superconductors*, Sov. Phys. JETP **19** (1964) 1228.
- [2] A. F. ANDREEV, *Thermal conductivity of the intermediate state of superconductors. II*, Sov. Phys. JETP **20** (1965) 1490.
- [3] D. D. AWSCHALOM, M. E. FLATTÉ, AND N. SAMARTH, *Spintronics*, Scientific American **286** (2002) 67.
- [4] J. BEHRNDT, M. MALAMUD, AND H. NEIDHARDT, *Scattering matrices and Weyl functions*, Proc. London Math. Soc. **97** (2008) 568.
- [5] S. BENVEGNÙ AND L. DĄBROWSKI, *Relativistic point interaction*, Lett. Math. Phys. **30** (1994) 159.
- [6] J. F. BRASCHE, M. MALAMUD, AND H. NEIDHARDT, *Weyl function and spectral properties of self-adjoint extensions*, Integr. Equ. Oper. Theo. **43** (2002) 264.
- [7] G. BURKARD, *Spin qubits: Connect the dots*, Nature Physics **2** (2006) 807.
- [8] Y. FURUHASHI, M. HIROKAWA, K. NAKAHARA, AND Y. SHIKANO, *Role of Phase Factor in Boundary Condition of One-Dimensional Junction*, J. Phys. A: Math. Theo., **43** (2010) 354010.
- [9] S. HERMELIN, S. TAKADA, M. YAMAMOTO, S. TARUCHA, A. D. WIECK, L. SAMINADAYAR, C. BÄUERLE, AND T. MEUNIER, *Electrons surfing on a sound wave as a platform for quantum optics with flying electrons*, Nature **477** (2011) 435.
- [10] M. HIROKAWA, *The Dicke-Type Transition for Non-Commutative Harmonic Oscillators in the Light of Cavity QED*, RIMS Kokyuroku **1607** (2008) 93.
- [11] M. HIROKAWA, *Non-Commutative Oscillators and Cavity-Induced Atom Cooling*, RIMS Kokyuroku **1658** (2009) 58.
- [12] 廣川 真男, 解析学で人工原子と光の物理に挑む!, 数理科学 5月号 (2012) 26.
- [13] M. HIROKAWA AND F. HIROSHIMA, *Absence of Energy Level Crossing for the Ground State Energy of the Rabi Model*, arXiv:1207.4020.
- [14] M. HIROKAWA AND T. KOSAKA, *One-Dimensional Tunnel-Junction Formula for Schrödinger Particle*, SIAM J. Appl. Math. **73** (2013) 2247.
- [15] M. HIROKAWA AND T. KOSAKA, *A Mathematical Aspect of A Tunnel-Junction for Spintronic Qubit*, to appear in J. Math. Anal. Appl.

- [16] Interdisciplinary Workshop on Quantum Device 2013  
<http://www.qis.ex.nii.ac.jp/iwqd2013/index.html>  
 Interdisciplinary Workshop on Quantum Device 2014  
<http://www.qis.ex.nii.ac.jp/iwqd2014/>
- [17] F. H. L. KOPPENS, C. BUIZERT, K. J. TIELROOIJ, I. T. VINK, K. C. NOWACK, T. MEUNIER, L. P. KOUWENHOVEN, AND L. M. K. VANDERSYPEN, *Driven coherent oscillations of a single electron spin in a quantum dot*, Nature **442** (2006) 766.
- [18] R. P. G. MCNEIL, M. KATAOKA, C. J. B. FORD, C. H. W. BARNES, D. ANDERSON, G. A. C. JONES, I. FARRER, AND D. A. RITCHIE, *On-demand single-electron transfer between distant quantum dots*, Nature **477** (2011) 439.
- [19] S. NADJ-PERGE, S. M. FROLOV, E. P. A. M. BAKKERS, AND L. P. KOUWENHOVEN, *Spin-orbit qubit in a semiconductor nanowire*, Nature **468** (2010) 1084.
- [20] M. REED AND B. SIMON, *Methods of Modern Mathematical Physics II. Fourier Analysis, Self-Adjointness*, Academic Press, 1975.
- [21] K. SCHMÜDGEN, *Unbounded Self-Adjoint Operators on Hilbert Space*, Springer, 2012.
- [22] Y. SHIKANO AND M. HIROKAWA, *Boundary Conditions in One-dimensional Tunneling Junction*, J. Phys.: Conference Series, 302 (2011) 0124044.
- [23] A. TOKUNO, M. OSHIKAWA, AND E. DEMLER, *Dynamics of One-Dimensional Bose Liquids: Andreev-Like Reflection at Y Junctions and the Absence of the Aharonov-Bohm Effect*, Phys. Rev. Lett. **100** (2008) 140402.
- [24] 得能光行, 押川正毅, 1次元ボース凝縮体の接合における輸送現象, 日本物理学会誌 **64** (2009) 773.
- [25] J. D. ULLMAN, *Fundamental Concepts of Programming Systems*, Addison-Wesley, 1976.
- [26] M. YAMAMOTO, S. TAKADA, C. BÄUERLE, K. WATANABE, A. D. WIECK, AND S. TARUCHA, *Electrical control of a solid-state flying qubit*, Nature Nanotechnology **7** (2012) 247.
- [27] R. A. WEBB, S. WASHBURN, C. P. UMBACH, AND R. B. LAIBOWITZ, *Observation of  $h/e$  Aharonov-Bohm Oscillations in Normal-Metal Rings*, Phys. Rev. Lett. **54** (1985) 2696.
- [28] J. WEIDMANN, *Linear Operators in Hilbert Spaces*, Springer-Verlag, 1980.